



Н.С. Белов

ТЕОРИЯ ИГР

**Пособие для подготовки
к олимпиадам по математике**

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» Лицей

Н.С. Белов

ТЕОРИЯ ИГР

Пособие для подготовки к олимпиадам по математике

Белгород 2025

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18я73
Б 43

Рецензенты:

Куликов Ю.А. – доцент кафедры педагогических и управленческих технологий Нижнетагильского филиала ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования», канд. физ.-мат. наук;

Чистяков Д. С. – старший методист Лицея НИУ ВШЭ, руководитель направления «Математика», канд. физ.-мат. наук

Белов Н.С.

Б 43

Теория игр : пособие для подготовки к олимпиадам по математике / Н.С. Белов. – Белгород : ООО «Эпицентр», 2025. – 49 с.

ISBN 978-5-6053739-5-7

В пособии подобраны и систематизированы по стратегиям задачи из теории математических игр. К каждой стратегии показаны примеры решения задач и предложены задачи для самостоятельной работы. В конце пособия ко всем задачам приведены ответы, указания, решения.

Заключительная глава полностью посвящена решению задач, предлагаемых в разные годы на Всероссийской олимпиаде школьников.

Данное пособие может помочь ученикам 7-11 классов в освоении идей и методов решения олимпиадных математических задач по теории игр, в подготовке их к математическим состязаниям. А также, быть интересным учителям математики для использования в индивидуальной работе со способными учениками и, прежде всего, в школьных математических кружках.

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-6053739-5-7

© Белов Н.С., 2025

Содержание

1. Введение	4
1. ИГРЫ-ШУТКИ.....	5
1.1. Примеры решения задач	5
2. ИГРЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ СИММЕТРИЮ	7
2.1. Примеры решения задач	7
2.2. Задачи для самостоятельного решения	12
3. ИГРЫ, В КОТОРЫХ СТРАТЕГИЯ – ДОПОЛНЕНИЕ	16
3.1. Примеры решения задач	16
3.2. Задачи для самостоятельного решения	19
4. РАЗНЫЕ ИГРЫ.....	22
4.1. Поиск стратегии с конца.....	22
4.2. Разбиение на пары.....	24
4.3. Передача хода	26
5. ЗАДАЧИ С «ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ» ...	29
5.1. Задачи с решениями	29
5.2. Задачи для самостоятельного решения	33
6. ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ	35
6.1. Игры, использующие симметрию.....	35
6.2. Игры, в которых стратегия – дополнение.....	40
6.3 Поиск стратегии с конца.....	44
6.4 Разбиение на пары.....	45
6.5. Передача хода	46
6.6 Задачи с ВсОШ	47
Литература.....	49

1. Введение

Игры и стратегии – отдельный класс математических задач.

Математические игры отличаются от обычных тем, что в них можно заранее определить исход игры. В таких играх предполагается, что игроки не делают ошибок, т. е. играют наилучшим образом.

Под понятием математической игры мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется позицией, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики/нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада или результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия выигрышной стратегии, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и ничейной стратегии, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

1. ИГРЫ-ШУТКИ

Первый класс игр, о которых пойдет речь Игры – шутки. Это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники. Поэтому для решения такой игры не нужно указывать выигрышную стратегию. Достаточно лишь доказать, что выигрывает тот или иной игрок (независимо от того, как будет играть!).

1.1. Примеры решения задач

1.1.1. Задача 1

Условие: Двое по очереди ломают шоколадку 6×8 . За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

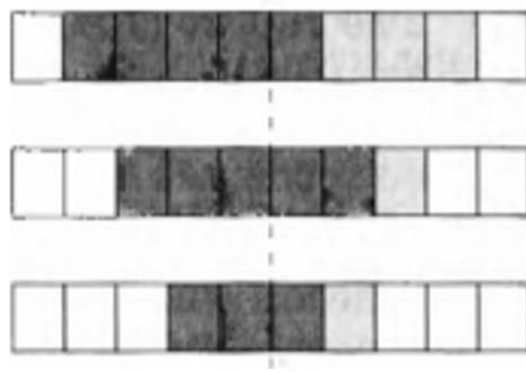
Решение: Основное соображение: после каждого хода количество кусков увеличивается ровно на 1. Сначала был один кусок. В конце игры, когда нельзя сделать ни одного хода, шоколадка разломана на маленькие дольки. А их 48! Таким образом, игра будет продолжаться ровно 47 ходов. Последний, 47-й ход (так же, как и все другие ходы с нечетными номерами) сделает первый игрок. Поэтому он в этой игре побеждает, причем независимо от того, как будет играть.

1.1.2. Задача 2

Условие: Дан клетчатый прямоугольник 1×1000 . Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может покрасить клетки какого-то прямоугольника 1×1 , 1×3 или 1×5 клеток (два раза красить одну и ту же клетку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника? *Ответ:* выигрывает второй игрок.

Первое решение: Заметим, что игра закончится, когда будут покрашены все клетки. При этом за каждый ход красится нечетное число клеток. Это означает, что после хода первого будет покрашено нечетное число клеток, а после хода второго – четное. Так как всего клеток 1000, то после каждого хода первого будет оставаться нечетное число непокрашенных клеток, т. е. хотя бы одна, и второй всегда сможет сделать ход. Это означает, что проигрывает первый.

Второе Решение: Предложим выигрышную стратегию для второго игрока. Пусть он красит прямоугольники симметрично относительно центра прямоугольника. Такой ответный ход возможен во всех случаях, кроме случая, в котором первый покрасит прямоугольник, содержащий центр доски. В этом случае второй должен отвечать так, чтобы после его хода множество покрашенных клеток было симметрично относительно центра прямоугольника (см. рис., темным цветом показаны ходы первого игрока, светлым – ответы второго).



2. ИГРЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ СИММЕТРИЮ

Очень простой, но мощный и красивый, а также наиболее популярный метод решения игровых задач – симметричная стратегия. Суть его – делать каждый раз ход, симметричный ходу противника. Доказательство правильности нашей стратегии будет пользоваться тем, что после каждого нашего хода позиция симметрична: раз так, то если противник сумел сделать свой ход, то и мы сможем сделать ход, симметричный ему. Выбирая стратегию, основанную на симметрии, важно помнить, что очередному симметричному ходу может помешать только что сделанный ход противника.

2.1. Примеры решения задач

2.1.1. Задача 1

Условие: Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение: В этой игре выигрывает первый, независимо от размеров стола! Первым ходом он кладет пятак так, чтобы центры монеты и стола совпали. После этого на каждый ход второго игрока начинающий отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция симметрична. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, он побеждает.

2.1.2. Задача 2

Условие: Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре?

Иногда при доказательстве правильности симметричной стратегии нельзя забывать о следующем обстоятельстве: очередному симметричному ходу может помешать ход, только что сделанный противником.

Ранее сделанные ходы, в силу симметрии позиции, помешать не могут.

Чтобы решить игру при помощи симметричной стратегии, необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению избранного плана.

Рассмотрим эту ситуацию на примере решения данной задачи.

Попытка решения: поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, то естественно попробовать симметричную стратегию. Но на этот раз (первым ходом нельзя поставить слона в центр доски) симметрию может поддерживать второй игрок. Казалось бы, по аналогии с предыдущей задачей, это и есть его выигрышная стратегия. Однако следуя ей, второму игроку не удастся сделать даже свой первый ход! Слон, только что поставленный первым игроком, может бить центрально-симметричное поле.

Решение данной задачи легко провести, применяя не центральную, а осевую симметрию шахматной доски. За ось симметрии можно взять прямую,

разделяющую четвертую и пятую горизонтали. Симметричные относительно нее поля имеют разный цвет, и, тем самым, слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое. Итак, в этой игре выигрывает все-таки второй игрок.

2.1.3. Задача 3

Условие: Имеется две кучки, камней – по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает, тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре?

Симметричная стратегия совсем не обязала иметь чисто геометрический смысл.

Решение: В игре второй игрок побеждает при помощи симметричной стратегии: каждым своим ходом он должен брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ход.

Симметрия в этой задаче состоит в равенстве числа камней в кучках.

2.1.4. Задача 4

Условие: На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой – 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

Решение: Выигрывает первый игрок. Первым ходом он делает стопки равными, по 20 монет, а затем как бы ни шел второй игрок, у первого есть возможность из другой кучки взять столько же монет (есть возможность делать симметричные хода)

Ответ: При правильной игре выигрывает первый игрок.

2.1.5. Задача 5

Условие: Игра с 25-ю монетами. В ряд лежат 25 монет. За ход разрешается брать одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Решение: Первый берет среднюю 13-ую монету. Второй игрок должен стремиться зеркально отражать ходы первого игрока относительно середины.

Если первый игрок берёт 1 монету – второй игрок тоже берёт 1 монету с симметричной позиции. Если первый игрок берёт 2 монеты – второй игрок берёт 2 монеты с симметричной позиции.

Таким образом, при нечётном количестве монет второй игрок может всегда поддерживать симметрию и в конечном итоге оставить первого игрока без хода.

2.1.6. Задача 6

Условие: Имеется шоколадка с пятью продольными и восемью поперечными углублениями, по которым её можно ломать (всего получается $9 \cdot 6 = 54$ дольки). Играют двое, ходят по очереди. Играющий за свой ход отламывает от шоколадки полоску ширины 1 и съедает её. Другой играющий за свой ход делает то же самое с оставшейся частью, и т. д. Тот, кто разламывает

полоску ширины 2 на две полоски ширины 1, съедает одну из них, а другую съедает его партнер. Докажите, что начинающий игру может действовать таким образом, что ему достанется по крайней мере на 6 долек больше, чем второму.

Решение: Первый сначала отламывает полоску 1×6 и съедает её. Остаётся шоколадка с чётным числом продольных и поперечных полосок. Дальнейшие ходы первого повторяют ходы второго: он отламывает полоски в том же направлении, что и второй. Тогда после хода второго в одном из направлений остаётся нечётное число полосок, а после хода первого – в обоих направлениях чётное. При этом первый съедает столько же, сколько и второй. Игра заканчивается, когда второй разламывает полоску ширины 2 на две равные дольки, которые достаются играющим, так что они опять съедают поровну. А в целом первый съедает ровно на шесть долек больше.

2.1.7. Задача 7

Условие: Играют двое. В начале игры есть одна палочка. Первый игрок ломает эту палочку на две части. И так игроки по очереди ломают на две части любую палочку из имеющихся к данному моменту. Если, сломав палочку, игрок может сложить из всех имеющихся палочек один или несколько отдельных треугольников (каждый – ровно из трёх палочек), то он выиграл. Кто из игроков (первый или второй) может обеспечить себе победу независимо от действий другого игрока?

Решение: Заметим, что выигрыш возможен только тогда, когда после очередного хода общее число палочек кратно 3. Пусть первого игрока зовут Петя, а второго – Вася. Тогда в первый раз выигрыш возможен после первого хода Васи, в следующий раз – после третьего хода Пети. Первым ходом Петя должен сломать палочку пополам. Как бы ни поделил одну из половинок Вася, треугольник из получившихся трёх палочек сложить нельзя, так как не выполняется неравенство треугольника (одна из сторон равна сумме двух других). Итак, после первого хода Пети образовалось две одинаковые кучки из одной палочки. Своим вторым и третьим ходом Петя должен "повторить ход" Васи на симметричной кучке. Таким образом, после третьего хода Пети перед ним лежат палочки длины a, b, c, a, b, c . Пусть $a \leq b \leq c$. Составим два равнобедренных треугольника: первый со сторонами a, a, c и второй со сторонами b, b, c .

Ответ: Первый игрок.

2.1.8. Задача 8.

Условие: Прямоугольная шоколадка размером 5×10 разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек. Двое играют в такую игру. Начинающий разламывает шоколадку по некоторому углублению на две прямоугольные части и кладёт на стол полученные части. Затем игроки по очереди делают аналогичные операции: каждый раз очередной игрок разламывает одну из частей на две части. Тот, кто первый отломит квадратную дольку (без углублений), а) проигрывает; б) выигрывает. Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш: начинающий или его партнёр?

Решение: В обоих вариантах игры побеждает начинающий. Это справедливо и для любой шоколадки из mn долек (размером $m \times n$), где mn чётно (за исключением случая шоколадки $2 \times n$ с нечётным n в варианте б) – здесь ответ зависит от mn .)

Мы рассмотрим сразу общий случай. Интересно, что выигрышные стратегии в "противоположных"; вариантах а) и б) почти совпадают.

а) Стратегия, обеспечивающая выигрыш начинающему, такова. Хотя бы одно из чисел m и n чётно – пусть это будет m ($m=2k$). Первым ходом начинающий разламывает шоколадку на две одинаковые половины (по $n \times k$ долек). Затем каждый ход второго он дублирует на другой половине шоколадки. Таким образом, после каждого хода первого игрока обе половины будут разломаны совершенно одинаковым образом. Ясно, что при этом первый не отломит дольку 1×1 раньше, чем это сделает второй.

б) Здесь при чётном $m > 2$ и $n > 1$ начинающий может использовать ту же "симметричную" стратегию до тех пор, пока второй не отломит полоску шириной 1; первый тут же отламывает он нее дольку 1×1 и выигрывает.

В варианте б) игры "симметричная" стратегия для шоколадки $2 \times n$ не годится – отламывать полоску шириной 1 нельзя (это немедленно ведет к проигрышу), так что шоколадку можно ломать только "поперек". Возникает совсем другая задача, более сложная задача, подробное исследование которой предоставляется читателю.

Ответ: для нечётного mn в общем случае нам неизвестен ни для варианта а), ни для варианта б) игры.

Ответ: В обоих вариантах игры побеждает начинающий.

2.1.9. Задача 9

Условие: Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•		•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•		•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•		•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•		•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•		•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•		•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•		•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•		•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

Решение: Расположим камни как показано на рисунке, где кучи соответствуют столбцам.

Петя должен брать несколько камней из одного столбца, а Вася – из разных. Стратегия Васи – делать ходы, симметричные Петиным относительно пустой диагонали. Изначально картинка симметрична. Поскольку строка, симметричная столбцу, не имеет с ним общих камней, то Вася каждый раз сможет восстанавливать нарушенную симметрию, то есть у него всегда есть ход. Так как игра конечна, то когда-то Петя проиграет.

Ответ: Вася.

2.1.10. Задача 10

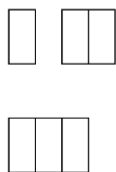
Условие: На доске написано число 2000. Петя и Коля по очереди делят число, написанное на доске, на любое из следующих трех чисел: 2, 5, 10. Проигрывает тот из них, после хода которого на доске появится нецелое число. Петя ходит первым. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Приведем выигрышную стратегию для Пети. Первым ходом он делит число 2000 на 5, после чего на доске написано число 400. Далее на каждый ход Коли Петя отвечает таким же ходом, т. е. делит на то же число, что и Коля. Теперь заметим, что 400 – полный квадрат, а значит, после каждого хода Пети на доске вновь появляется квадрат некоторого натурального числа. Тогда после Колиного хода квадрата натурального числа появиться не может, а значит, не может появиться и единица. Следовательно, единица появится после хода Пети.

Ответ: выигрывает Петя.

2.1.11. Задача 11

Условие: Игроки по очереди закрашивают клетки квадрата 10×10 , причем за один ход можно закрасить одну из трех фигур, изображенных на рисунке, дважды закрашивать клетку нельзя. Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку. Кто имеет выигрышную стратегию?



Решение: Выигрывает второй. Выигрышная стратегия: после каждого хода первого игрока второй должен закрашивать клетки, расположенные симметрично относительно центра квадрата клеткам, закрашенным только что первым игроком. После каждого хода второго игрока картина на доске будет симметричной относительно центра. В этом случае симметричные клетки одновременно либо закрашены, либо не закрашены. Поэтому если есть возможность сделать ход первому игроку, то есть возможность сделать симметричный ход и второму игроку.

Примечание: Если воспользоваться осевой симметрией, то после некоторых ходов первого игрока будет невозможно закрасить симметричные клетки (некоторые из них могут быть только закрашены первым игроком).

2.1.12. Задача 12

Условие: На доске размером 8×8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Второй игрок может всегда ходить симметрично первому (относительно центра доски). Тогда при его ходе не может появиться закрашенный уголок – иначе он появился бы на предыдущем ходу. Значит, он выиграет.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. Задача 1

В первой кучке лежит 100 конфет, а во второй – 200 конфет. За ход можно взять любое количество конфет из любой кучки. Выигрывает взявший последнюю. Кто выигрывает при правильной игре?

2.2.2. Задача 2

Шахматный король стоит в левом нижнем углу шахматной доски. Участвуют два игрока, которые ходят по очереди. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, на одно поле вверх или на одно поле по диагонали "вправо-вверх". Выигрывает игрок, который поставит короля в правый верхний угол доски. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

2.2.3. Задача 3

На столе лежат 2002 карточки с числами 1, 2, 3, ..., 2002. Двое играющих берут по одной карточке по очереди. После того, как будут взяты все карточки, выигравшим считается тот, у кого больше последняя цифра суммы чисел на взятых карточках. Выясните, кто из играющих может всегда выигрывать независимо от игры противника, и объясните, как он должен при этом играть.

2.2.4. Задача 4

Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

2.2.5. Задача 5

В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

2.2.6. Задача 6

На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно – либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа; – либо разделить одно из чисел пополам, если оно чётное. Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

2.2.7. Задача 7

Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись: "ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА". Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву "А". Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

2.2.8. Задача 8

На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

2.2.9. Задача 9

Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

2.2.10. Задача 10

Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам. Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем также поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению) и т.д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его? Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

2.2.11. Задача 11

На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают по одной клетке так, чтобы закрашенные клетки не имели общих точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2.2.12. Задача 12

На окружности даны $2n$ точек. Двое по очереди проводят хорды с концами в этих точках так, чтобы хорды не пересекались (хорды могут иметь общие концы). Проигрывает тот, кто не сможет провести хорду. Кто победит при правильной игре?

2.2.13. Задача 13

Имеются три одинаковые кучки камней. Двое играющих берут по очереди любое количество камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает взявший последние камни. Кто выиграет при правильной игре?

2.2.14. Задача 14

Есть клетчатый прямоугольник 3×10 клеток. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно закрасить квадрат 1×1 , 2×2 или 3×3 клетки. Красить уже покрашенные клетки нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

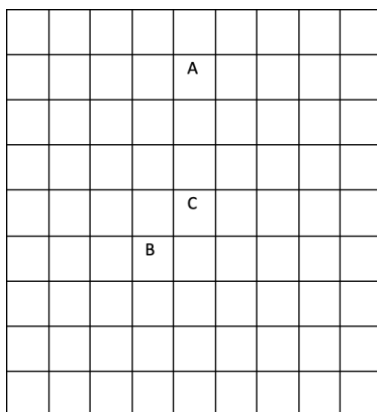
2.2.15. Задача 15

В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает переправивший последний минус. Кто выиграет при правильной игре?

2.2.16. Задача 16

а) Соты имеют форму квадрата 9×9 .

Все квадратики, кроме центрального (С), заполнены медом. В центре — деготь. За один ход разрешается разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дегтя. Проигрывает тот, кому остался только деготь. Кто выиграет при правильной игре?



б) Задача та же, но деготь находится не в центре, а в клетке А. в) Деготь находится в клетке В.

2.2.17. Задача 17

Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки. За один раз можно оборвать один или два соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает тот, кто сделает

последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

2.2.18. Задача 18

Двое заполняют по очереди таблицу 3×3 произвольными действительными числами. Затем первый находит сумму чисел первой и третьей строк, а второй – сумму чисел первого и третьего столбцов. Выигрывает тот, у кого сумма больше. Кто может обеспечить себе победу?

2.2.19. Задача 19

Дана клетчатая доска 10×10 . За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминушкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминушки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2.2.20. Задача 20

В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Кто выигрывает при правильной игре?

2.2.21. Задача 21

Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10 . За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто отломит дольку 1×1 . Кто выигрывает при правильной игре?

2.2.22. Задача 22

Двое играют на доске 9×9 . Начинаящий ставит крестики, его соперник – нолики (по одному за ход). В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, – это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, в которых ноликов больше – очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. ИГРЫ, В КОТОРЫХ СТРАТЕГИЯ – ДОПОЛНЕНИЕ

3.1. Примеры решения задач

3.1.1. Задача 1

Условие: Кто первым назовет число 100. Играют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названному числу любое целое число от 1 до 9 и называет сумму, к этой сумме первый вновь прибавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму, и т.д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 100.

Какие числа должен подбирать второй игрок, чтобы всегда выигрывать, независимо от числа, которое предлагает первый игрок.

Решение: Нетрудно обнаружить способ игры второго, иначе говоря, стратегию второго, которая обеспечивает ему победу: «добавлять до числа, кратного 10». Если, к примеру, первый назвал 4, второй прибавляет 6 и называет сумму 10. Если первый прибавит 9 и назовет сумму 19, второй прибавит 1 и назовет 20. Ясно, что как бы ни играл начинающий, второй при такой стратегии назовет первым число 100. Если он хоть раз ошибётся, то этой стратегией неминуемо воспользуется первый и победит.

3.1.2. Задача 2

Условие: На доске написано число 1. Два игрока по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает игрок, который первый запишет на доске число тридцать. Укажите выигрышную стратегию для второго игрока.

Решение: Выигрышная ситуация есть у первого игрока. Первым ходом он может дописать пять, т.е. записать сумму шесть. Какое бы число не дописал второй, у первого всегда есть возможность довести сумму до числа кратного шести, т.е. после ходов первого сумма будет равна 6, 12, 18, 24, а затем сколько бы ни дописал второй, первый может взять все оставшееся, так как останется не больше пяти и первым запишет 30.

3.1.3. Задача 3

Условие: Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа 1, 2, 3, 24 (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?

Решение: Опишем стратегию второго. Заметим, что по каждой клетке проходят ровно два кольца, пересекающиеся, кроме нее, еще по одной клетке на противоположной грани. Назовем такие клетки соответствующими. Разобьем числа на пары с суммой 25: (1, 24), (2, 23), (12, 13).

Если первый игрок своим очередным ходом ставит в клетку некоторое число, то пусть второй игрок ставит в ответ парное число в соответствующую клетку.

При такой стратегии второго по окончании игры в каждом кольце окажутся по два числа из четырех пар, поэтому их сумма равна $4 * 25 = 100$.

Ответ: Не сможет.

3.1.4. Задача 4

Условие: Двое играют на клетчатой доске 2×10 , расположенной вертикально. Играющий закрашивает любую клетку и вместе с ней все клетки выше и правее от закрашенной. Кто закрасит последнюю клетку, тот проиграл. Кто имеет выигрышную стратегию?



Решение: Сначала первый игрок должен закрасить правую верхнюю клетку, а затем ходить так, чтобы каждый раз оставалась незакрашенной фигура одной и той же формы «ступенька» (см. рис.). Первый игрок может воспользоваться этой стратегией: если второй закрашивает несколько клеток только в правом столбце, нужно закрасить клетки в левом столбце, оставив «ступеньку». Если же второй игрок закрашивает клетки в обоих столбцах, то в результате будет закрашено равное количество клеток в обоих столбцах, тогда первый закрашивает одну клетку в правом столбце.

Через несколько ходов, перед очередным ходом второго игрока останется незакрашенной только одна клетка (левая нижняя), которую второй вынужден будет закрасить.

3.1.5. Задача 5

Условие: На столе лежит 2001 монета. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй – любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 81 монету. Каждым следующим ходом, если второй берет x монет, то первый должен взять $101 - x$ монет. Он всегда может это сделать, потому что если x – четное число от 2 до 100, то $(101 - x)$ – нечетное число от 1 до 99. Так как $2001 = 101 * 19 + 81 + 1$, то через 19 таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать очередной ход, т. е. проигрывает.

Ответ: выигрывает первый игрок.

3.1.6. Задача 6

Условие: Двое играют в следующую игру. Есть три кучки камней. В первой из них лежит 7 камней, во второй – 9 камней, в третьей – 11 камней. Ходят по

очереди. За один ход разрешается либо взять из любой кучки 1 камень, либо взять по 1 камню из любых двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

Решение: Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом, после хода второго в первой кучке будет лежать 6 камней, во второй – 8 камней, в третьей – 10 камней. То есть в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый. То есть после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т. е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он заберет последние камни из кучек и выиграет.

3.1.7. Задача 7

Условие: На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на три, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет – то его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре?

Решение: Укажем, как партнер начинающего может гарантировать себе выигрыш. В начале партии он должен стирать числа, кратные 3 до тех пор, пока таковых не останется. Поскольку количество чисел, не превосходящих 1000 и кратных 3, равно 333, то партнеру начинающего понадобится не более 333 ходов для того, чтобы ни одно из оставшихся на доске чисел не делилось на 3 (некоторые из чисел, кратных 3, могут быть стерты и начинающим). После этого партнер начинающего делает свои ходы произвольно вплоть до того момента, когда на доске останутся три числа. Каждое из них будет давать остаток 1 и 2 при делении на 3, поэтому среди трех остающихся на доске чисел обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки. Именно их должен оставить партнер начинающего (сумма не будет делиться на 3).

Ответ: Выигрывает партнер игрока, делающего первый ход.

3.1.8. Задача 8

Условие: В первые 1999 ячеек компьютера в указанном порядке записаны числа: 1, 2, 4, ..., 21998. Два программиста по очереди уменьшают за один ход на единицу числа в пяти различных ячейках. Если в одной из ячеек появляется отрицательное число, то компьютер ломается

и сломавший его оплачивает ремонт. Кто из программистов может уберечь себя от финансовых потерь независимо от ходов партнера, и как он должен для этого действовать?

Решение: Первым ходом начинающий уменьшает на единицу числа в

первой и четырех последних ячейках. В дальнейшем на каждый ход второго он уменьшает на единицу числа в тех же ячейках, что и второй. Все числа в ячейках с первой по 1995-ю четные после ответных ходов первого, и поэтому ни одно из них первый не может сделать отрицательным. Первый программист может сломать компьютер лишь в том случае, если он сделает отрицательным одно из чисел в четырех последних ячейках. Для этого должно быть сделано более 21995 ходов, не ломающих компьютер. С другой стороны, на каждом ходу уменьшается пять чисел, т. е. хотя бы одно из чисел в ячейках с 1 по 1995. Первоначальная сумма чисел в этих ячейках $1 + 2 + \dots + 21994 = 219951$. Поэтому могло быть сделано не более 21995 1 ходов, не ломающих компьютер. Значит, компьютер испортит второй программист.

Ответ: Начинаящий.

3.1.9. Задача 9

Условие: Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам. Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем также поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению) и т. д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его? Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

Решение: Рассмотрим первый случай, пусть второй пират на каждом шагу берет столько же монет, что и первый, но из другого мешка. Нетрудно убедиться, что в этом случае второй всегда может сделать ответный ход. Каждый раз после хода второго пирата разность числа монет в мешках будет той же, что в начале, значит, после некоторого его хода в одном мешке монет вообще не будет, а в другом будет не более одного, значит, первый пират не сможет сделать ход и проиграет.

Во втором случае, если разность больше 1, то первый пират своим ходом забирает из большего мешка m монет, если разность имеет вид $3m$ или $3m \pm 1$, чем приводит количество монет в мешках к первому случаю и дальше использует описанную выше стратегию.

Ответ: Если количество монет в мешках различается не более, чем на 1, то алмаз достанется второму пирату, в противном случае – первому.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

3.2.1. Задача 1

Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Вторым раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить. а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно,

то выигрывает второй. б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

3.2.2. Задача 2

$$\begin{cases} * = * \\ * = * + * \\ * = * + * + * \end{cases} .$$

Игроки по очереди ставят числа вместо звездочек в следующей системе неравенств:

Выигрывает первый, если все равенства выполняются, второй – если хотя бы одно равенство неверно. Кто выигрывает при правильной игре?

3.2.3. Задача 3

На столе доньшками вниз стоит 1001 пустой стакан. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть не более одного стакана, за второй – не более двух и т. д. При этом за каждый ход необходимо перевернуть хотя бы 1 стакан. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы расположены доньшками вверх. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

3.2.4. Задача 4

Двое играющих по очереди красят клетки квадрата 8×8 . За один ход игрок красит своим цветом одну клетку. Перекрашивать клетки нельзя. Первый стремится закрасить своим цветом квадрат 2×2 . Может ли второй помешать первому независимо от его игры?

3.2.5. Задача 5

На окружности отмечены $2n > 6$ точек, делящих ее на равные дуги. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы обвести кружочками пару диаметрально противоположных точек и еще одну точку. Дважды обводить одну и ту же точку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

3.2.6. Задача 6

На столе лежат n спичек ($n > 1$). Двое игроков по очереди снимают их со стола. Первым ходом игрок снимает со стола любое число спичек от 1 до $n-1$, а дальше каждый раз можно брать со стола не больше спичек, чем взял предыдущим ходом партнер. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Найдите все n , при которых первый игрок может обеспечить себе выигрыш.

3.2.7. Задача 7

На концах клетчатой полосы размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева – фишка первого игрока, справа – второго. За ход разрешается сдвинуть

свою фишку в направлении противоположного края полосы на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полосы. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

3.2.8. Задача 8

В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

3.2.9. Задача 9

В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя – либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

4. РАЗНЫЕ ИГРЫ

Не все игровые задачи решаются с использованием описанных выше методов. В этом разделе представлены примеры разных игровых задач, решение которых основано на иных подходах. В некоторых задачах выигрышная стратегия не указывается, доказывается только ее существование.

Рассмотрим некоторые из них.

4.1. Поиск стратегии с конца

В этом разделе рассматриваются задачи, в которых выигрышная стратегия ищется «с конца» игры. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. принцип решения игровых задач методом рассуждения «с конца» состоит в следующем: нужно определить выигрышные и проигрышные ходы. Ход является выигрышным, если после него любой ход соперника является проигрышным. Ход является проигрышным, если после него у соперника есть хотя бы один выигрышный ход.

4.1.1. Задача 1

Условие: Играют двое. Первый называет любое число от 1 до 10. Затем они поочередно прибавляют к последнему названному числу число от 1 до 10 и называют сумму. Выигрывает тот, кто назовет 20. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш?

Решение: Рассуждаем с конца. Последним ходом будет названо число 20. Если игрок называет какое-либо число от 10 до 19, то его соперник может выиграть, назвав сразу число 20, следовательно, это проигрышные ходы. Если игрок назовет число 9, то любой ход соперника является проигрышным (он может называть только числа от 10 до 19), следовательно, «ход на 9» является выигрышным. Значит, выигрывает игрок, который может назвать число 9. Эта возможность есть у первого игрока при первом же ходе.

4.1.2. Задача 2 – «Поставь на ноль»

Условие: Имеется клетчатая полоска, клетки которой пронумерованы, начиная с нуля.

Фишка стоит на поле 25. Двое игроков поочередно передвигают фишку на 1, 2, 3 или 4 клетки влево. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре? (Игра называется правильной, если игрок, имеющий выигрышную стратегию, действует по этой стратегии).

0	2	1	3		24	25
---	---	---	---	--	----	----

Решение: Рассуждаем с нуля (здесь заканчивается игра). Очевидно, что ход на 0 является выигрышным, на 1, 2, 3 и 4 – проигрышные (с них за один ход можно попасть на 0), на 5 – выигрышный (с 5 любой ход ведет к проигрышу) и т.д. Выигрышными будут все клетки с номерами, кратными 5.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	23	24	25
в	п	п	п	п	в	п	п	п	п	в		п	п	

Таким образом, первый ход первого игрока будет проигрышным (он не может поставить фишку на число, кратное пяти). Выигрывает второй, он должен ставить фишку на числа, кратные пяти.

4.1.3. Задача 3

Условие: Условие задачи то же, что в задаче 1, но выигрывает игрок, назвавший число

100. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Решение: Проигрышными являются ходы от 90 до 99 (после них соперник сразу назовет 100), 89 – выигрышный ход (после него можно сделать только проигрышные ходы от 90 до 99), проигрышные – от 79 до 89, а выигрышный – 78 и т.д. Перечислим остальные выигрышные ходы: 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Следовательно, выигрывает первый игрок, который первым ходом называет число 1, а в каждый следующий его ход он должен прибавить число, которое в сумме с числом, прибавленным соперником, составляет 11.

4.1.4. Задача 1 (самостоятельно)

Условие: Играют двое. Первый называет любое число от 1 до 10. Затем они поочередно прибавляют к последнему названному числу число от 1 до 10 и называют сумму. Проигрывает тот, кто назовет трехзначное число. Кто выигрывает при правильной игре?

4.1.5. Задача 2 (самостоятельно)

Условие: Условие то же, что в задаче «Поставь на ноль», но передвигать фишку можно: а) на 1, 2 или 4 клетки; б) на 1, 3 или 4 клетки; в) на 1, 2 или 6 клеток; г) на 2 или 5 клеток; д) на 2, 4 или 7 клеток?

4.1.6. Задача 3 (самостоятельно)

Условие: Имеется кучка из 25 камней. Игроки по очереди берут из этой кучки 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода.

Примечание: Очевидно, что эта игра изоморфна игре «Поставь на ноль», в которой фишку можно передвигать на 1, 2 или 3 клетки. Поэтому решив одну задачу, можно указать решение и другой.

4.1.7. Задача 4 (самостоятельно)

Условие: В куче 25 камней. Игроки по очереди могут взять из кучи 2 камня, 4 камня или 7 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто победит при правильной игре?

4.1.8. Задача 5 (самостоятельно)

Условие: В куче лежат 50 камней. Двое поочередно добавляют в нее любое количество камней от 1 до 10. Выигрывает тот, кто первым сумеет довести

количество камней до двухсот. Кто выигрывает?

4.1.9. Задача 6 (самостоятельно)

Условие: «Одинокий ферзь». На шахматной доске на поле f8 стоит ферзь. Игроки по очереди передвигают его на любое количество клеток влево, вниз или по диагонали влево вниз. Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле a1. Кто выиграет при правильной игре?

4.1.10. Задача 7 (самостоятельно)

Условие: Волк и Заяц играют в следующую игру. На доске написано некоторое натуральное число. Ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую-нибудь его ненулевую цифру и написать на месте старого числа получившееся число. Выигрывает тот, кто получит ноль. Начинает игру Волк. Какое число первоначально должно быть написано, чтобы Заяц имел выигрышную стратегию?

***Игры называют изоморфными, если они «одинаково устроены», т.е. между их условиями существует взаимно однозначное соответствие.

4.2. Разбиение на пары

4.2.1. Задача 1

Условие: У ромашки: а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

Решение: а) Занумеруем лепестки по кругу. Разобьем их на пары (1;7), (2;8), (3;9), (4;10), (5;11), (6;12). А теперь замечаем: парные лепестки не соседние, т.е. их не может сорвать один игрок, и какие бы лепестки не оторвал первый, у второго есть возможность оторвать парные с ним или с ними.

б) Опять нумеруем лепестки с 1 по 11. Возможны два случая. Первый случай. Первый отрывает один лепесток, например, первый, тогда второй отрывает два лепестка шестой и седьмой, а затем лепестки разбиваем на пары: (2;8), (3;9), (4;10), (5;11), а дальше второй отрывает парные лепестки. Второй случай. Первый срывает два лепестка, например, 1 и 2, тогда второй срывает седьмой и опять, разбивая лепестки на пары и срывая парные, второй выигрывает.

4.2.2. Задача 2

Условие: Белая ладья стоит на поле b2 шахматной доски 8×8 , а чёрная – на поле c4. Игроки ходят по очереди, каждый – своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? (За ход ладья сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.)

Ответ: Второй игрок.

Решение: Разобьём вертикали на пары, поместив при этом вертикали b и c в одну пару. Также разобьём на пары горизонтالي, поместив при этом 2-ю и 4-ю в одну пару. Тогда и клетки разобьются на пары: парная клетка лежит на пересечении парной горизонтالي и парной вертикали. Ладьи на парных клетках друг друга не бьют. Стратегия второго: на любой ход первого отвечать ходом в парную клетку. Это возможно: если первый сделал ход ладьёй из одной клетки в другую, то эти клетки лежат в одном ряду. Но тогда парные к ним клетки лежат в парном ряду, и ход ладьёй между ними тоже возможен. Таким образом, всегда после хода второго все непосещённые клетки будут состоять из указанных пар, и второй всегда будет попадать на непосещённую клетку. Значит, именно первый когда-то не сможет сделать ход и проиграет.

4.2.3. Задача 3

Условие: Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа 1, 2, 3, ..., 24 (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?

Ответ: Не сможет.

Решение: Опишем стратегию второго. Заметим, что по каждой клетке проходят ровно два кольца, пересекающиеся, кроме нее, еще по одной клетке на противоположной грани. Назовем такие клетки соответствующими. Разобьём числа на пары с суммой 25:

(1, 24), (2, 23), ..., (12, 13).

Если первый игрок своим очередным ходом ставит в клетку некоторое число, то пусть второй игрок ставит в ответ парное число в соответствующую клетку. При такой стратегии второго по окончании игры в каждом кольце окажутся по два числа из четырех пар, поэтому их сумма равна $4 * 25 = 100$.

4.2.4. Задача 4

Условие: В клетчатом прямоугольнике 49×69 отмечены все $50 * 70$ вершин клеток. Двое играют в следующую игру: каждым своим ходом каждый игрок соединяет две точки отрезком, при этом одна точка не может являться концом двух проведенных отрезков. Отрезки могут содержать общие точки. Отрезки проводятся до тех пор, пока точки не кончатся. Если после этого первый может выбрать на всех проведенных отрезках направления так, что сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору, то он выигрывает, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Выигрывает первый.

Решение: Разобьём все отмеченные точки на пары так, что любой отрезок с концами в точках одной пары – горизонтальный отрезок длины 1. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Пусть первым ходом он соединит точки из какой-нибудь пары. Далее, если второй соединяет отрезком две точки какой-нибудь пары, то первый соединяет отрезком две точки другой пары (назовем эти два проведенных отрезка двойкой первого типа). Если же второй соединяет

отрезком две точки из разных пар, то первый соединяет отрезком две оставшиеся точки из этих пар (назовем такие два отрезка двойкой второго типа). Заметим, что количество точек делится на 4, поэтому последний ход сделает второй. Первый будет делать ответные ходы до тех пор, пока не останется одна пара – эти две оставшиеся точки соединит отрезком второй игрок. Теперь заметим, что в двойке первого типа можно выбрать направления так, чтобы сумма двух векторов равнялась нулевому вектору, а двойке второго типа можно выбрать направления так, чтобы сумма двух векторов равнялась горизонтальному вектору длины 2 (любого из двух направлений). Теперь первому нужно так выбрать направления в двойках второго типа, чтобы суммарная длина всех векторов в этих двойках равнялась либо нулевому вектору, либо горизонтальному вектору длины 2. После этого останется только два отрезка длины 1 (первый ход первого игрока и последний ход второго), на которых первому игроку нужно выбрать направления так, чтобы сумма всех векторов равнялась нулевому вектору.

4.2.5. Задача 1 (самостоятельно)

Условие: В левом нижнем углу доски 7×7 стоит фишка. Два игрока по очереди передвигают фишку на одну из соседних по стороне клеток. Проигрывает тот игрок, после хода которого фишка попадает в клетку, в которой она уже побывала. Кто выигрывает при правильной игре?

4.3. Передача хода

Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже, чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

4.3.1. Задача 1

Условие: Двое по очереди выписывают на доску делители числа 2010. При этом запрещается выписывать делители уже выписанных чисел. Проигрывает тот, кто не может выписать очередное число. Кто выиграет при правильной игре?

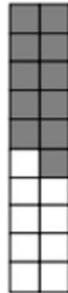
Решение: Игра конечна. Предположим, что у второго есть выигрышная стратегия. Это означает, что какие бы числа не выписывал первый игрок, второй всегда может гарантировать себе последний ход. Например, если первый выпишет на доску цифру 1, то у второго найдется выигрышная стратегия S и следующим ходом он выпишет на доску число a . Однако если первый первым ходом выпишет число a , то число 1 на доске уже не появится и, значит, первый может воспользоваться выигрышной стратегией S . Таким образом, выиграет первый.

4.3.2. Задача 2

Условие: Двое играют на клетчатой доске 2×10 , расположенной вертикально. Играющий закрашивает любую клетку и вместе с ней все клетки выше и правее от закрашенной. Кто закрасит последнюю клетку, тот проиграл. Кто имеет выигрышную стратегию?

Ответ: первый.

Решение: Сначала первый игрок должен закрасить правую верхнюю клетку, а затем ходить так, чтобы каждый раз оставалась незакрашенной фигура одной и той же формы «ступенька» (см. рис.).



Первый игрок может воспользоваться этой стратегией: если второй закрашивает несколько клеток только в правом столбце, нужно закрасить клетки в левом столбце, оставив «ступеньку». Если же второй игрок закрашивает клетки в обоих столбцах, то в результате будет закрашено равное количество клеток в обоих столбцах, тогда первый закрашивает одну клетку в правом столбце. Через несколько ходов, перед очередным ходом второго игрока останется незакрашенной только одна клетка (левая нижняя), которую второй вынужден будет закрасить.

4.3.3. Задача 3

Условие: Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя.

Проигрывает тот, кому некуда ходить. а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй. б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

Решение: а) Пусть n четно. Тогда первый игрок мысленно разбивает доску на «доминушки», далее пользуется стратегией «закрыть доминушку». Перед ходом первого игрока фишка стоит на одной клетке «доминушки», ход нужно сделать на вторую клетку, второй игрок делает ход на незакрытую «доминушку», первый «закрывает» ее и т. д. Таким образом, первый игрок может гарантировать себе ответный ход и выигрыш.

Пусть n нечетно. Тогда вся доска за исключением клетки, на которой стоит фишка, разбивается на «доминушки», и второй игрок может воспользоваться стратегией «закрыть доминушку» и выиграть.

б) Ответ: первый.

Пользуемся той же стратегией. Для четного n обоснование очевидно. Пусть n нечетно. Докажем, что второй игрок не сможет сделать ход на свободную угловую клетку. Раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. Первоначально фишка стоит на белой клетке, первый игрок будет ходить на черные клетки, второй – на белые, следовательно, он не сможет сделать ход на угловую (черную) клетку. Поэтому первый игрок сможет воспользоваться стратегией «закрыть доминушку».

4.3.4. Задача 1 (самостоятельно)

Условие: Выписаны в ряд числа от 1 до 2010. Играют двое, делая ходы поочередно. За один ход разрешается вычеркнуть любое из записанных чисел вместе со всеми его делителями. Выигрывает тот, кто зачеркнет последнее число. Докажите, что первый игрок выиграет при правильной игре.

4.3.5. Задача 2 (самостоятельно)

Условие: Имеется куб и две краски: красная и зеленая. Первый выбирает два ребра куба и красит их в зеленый цвет, второй – в красный. Запрещается перекрашивать ребро в другой цвет или красить дважды одной краской. Выигрывает тот, кто первым сможет покрасить своей краской все ребра какой-либо грани. Кто имеет выигрышную стратегию?

4.3.6. Задача 3 (самостоятельно)

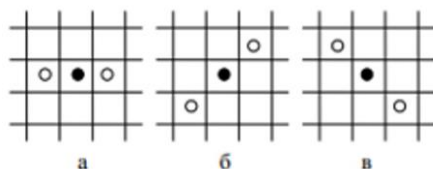
Условие: На доске написаны числа 1, 2, ..., 1000. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остается два числа. Если их сумма делится на 3, то побеждает первый игрок, если нет – второй. Кто выигрывает при правильной игре?

4.3.7. Задача 4 (самостоятельно)

Условие: На доске 4×6 клеток стоят две чёрные фишки Вани и две белые фишки Серёжи (см. рис. снизу).

Ваня и Серёжа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперёд (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят чёрная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали (как на рис. а-в), она считается

«убитой» и снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Серёжа ему помешать?



5. ЗАДАЧИ С «ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ»

5.1. Задачи с решениями

5.1.1. Задача 1

Условие: (Всеросс., 2019, регион, 9.3) Коля и Дима играют в игру на доске 8×8 , делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (доминушками) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой еще не нарисован крестик и которая еще не покрыта доминушкой). Дима за свой ход должен накрыть доминушкой две соседних клетки (еще не накрытые доминушками), в которых суммарно четное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ: Коля.

Решение: Приведем выигрышную стратегию за Колю. Мысленно раскрасим доску шахматным образом и будем ставить крестики только в черные клетки. Дима за один свой ход покрывает ровно одну из черных клеток; значит, Коля сможет сделать 16 ходов. Покажем, что Дима не сможет сделать свой 17-й ход.

Пока Коля действует по стратегии, под каждой Диминой доминушкой будет белая клетка без крестика. Поэтому Дима не сможет накрыть доминушкой ни один крестик. Тогда за 16 пар ходов все черные клетки будут покрыты доминушками или крестиками, но ни в одной белой клетке не будет крестика. Значит, Дима не сможет поставить доминушку, соблюдая правила игры.

5.1.2. Задача 2

Условие: (Всеросс., 2016, финал, 10.3) Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (при своём первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Илья.

Решение: Укажем выигрышную стратегию для Ильи. Обозначим через А, В и С кучки, в которых изначально было 100, 101 и 102 камня соответственно. Первым ходом Илья берёт камень из кучки В. Далее возможны два случая.

1. Своим первым ходом Костя возьмёт камень не из кучки В. Тогда Илья всегда будет повторять ход Кости, то есть брать камень из той же кучки, из которой только что брал камень Костя. Заметим, что, пока Илья действует по этой стратегии, после каждого его хода в каждой кучке остаётся чётное число камней. Свой второй ход Илья сможет сделать, так как Костя взял свой первый камень не из В. После этого каждым ходом Костя будет брать камень из кучки Х, отличной от кучки Y, из которой только что взял Илья. Тогда в Х останется

нечётное число камней, и Илья сможет взять из X ещё один камень. Значит, действуя по этой стратегии, Илья всегда сможет сделать ход после хода Кости. Поскольку игра рано или поздно закончится, Костя проигрывает.

2. Своим первым ходом Костя возьмёт камень из кучки B . В этом случае Илья будет придерживаться следующей стратегии. Если каким-то ходом Костя возьмёт камень из кучки C , то Илья берёт камень оттуда же. Если же Костя возьмёт камень из кучки A или B , то Илья берёт камень из кучки B или A соответственно. Заметим, что, пока Илья действует по этой стратегии, после каждого его хода в C будет чётное число камней, а в A и B камней будет поровну.

Покажем, что и в этом случае Илья всегда сможет сделать ход. Свой второй ход Илья сделать сможет (взяв камень из A). Если на очередном шаге ему нужно брать камень из кучки C , то до этого оттуда брал камень Костя, значит, на предыдущем ходу оба игрока не брали ничего из C . При этом после хода Кости там нечётное число камней, поэтому Илья может взять камень из C . Если же Илье нужно брать камень не из C , скажем, из A , то Костя только что взял камень из B (и, значит, в A ещё есть камень). Следовательно, на предыдущем шаге Костя не мог брать камень из B , поэтому Илья не брал камень из A , то есть он может взять камень оттуда.

Замечания: Стратегия, описанная в случае 2, также работает, если Костя своим первым ходом возьмёт камень из C .

5.1.3. Задача 3

Условие: (Всеросс., 2017, регион, 10.2) Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, – этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть?

Ответ: У Васи.

Решение: Рассмотрим момент после третьего хода (когда выписаны три числа). Если к этому моменту никто еще не выиграл, то следующим ходом Вася выигрывает – ему достаточно найти два выписанных числа одной четности и выписать своим ходом их среднее арифметическое (оно является четным числом).

Кроме того, заметим, что если три целых числа из множества $1, 2, 3, \dots, 2018$ образуют арифметическую прогрессию, то ее разность не больше 1008 (иначе разность между наибольшим и наименьшим числами будет $2 \cdot 9 = 2018$, что невозможно).

Теперь опишем выигрышную стратегию Васи.

Пусть первым ходом Петя выписал число a . Предположим, что $a \geq 1009$. Тогда Вася выписывает одно из чисел 2017 или 2018, четность которого отлична от четности числа a (обозначим это число через b). После этого хода выписано два числа разной четности; значит, они не могут быть первым и третьим членом

прогрессии из целых чисел. А поскольку $b - a \leq 1009$, они также не могут быть соседними членами прогрессии. Тем самым, Петя не сможет выиграть третьим ходом. Но в этом случае, как мы видели ранее, следующим ходом Вася выиграет.

Если же $a \leq 1010$, то Вася отвечает, выписывая то из чисел 1 и 2, которое по четности отличается от a . Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю.

5.1.4. Задача 4

Условие: (Всеросс., 2020, регион, 10.5) Петя и Вася играют на доске 100×100 . Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих по вертикали. (На рисунке показаны возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4). Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

	П		В
П			В
			В

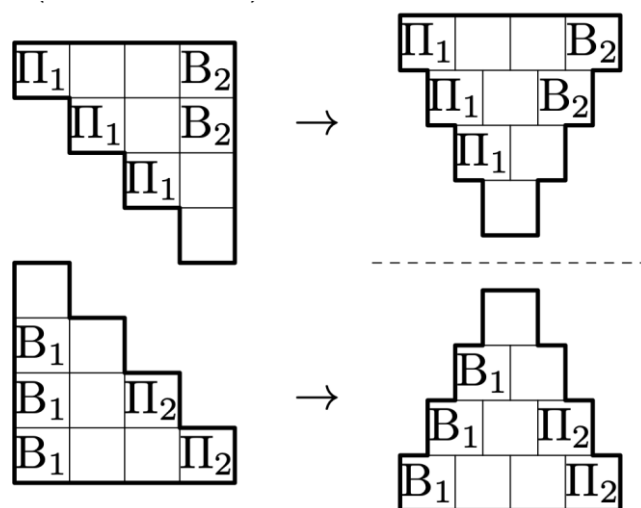
Ответ: Выигрывает Петя.

Решение: Приведем одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он все время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски (назовем ее главной).

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали. После этого доска разбивается на две одинаковых "лесенки" (см. рис. снизу).

■				
	■			
		■		
			■	
				■

Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на полклетки относительно предыдущего ряда (см. рис. снизу).



В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом "вертикали" одной лесенки симметричны "диагоналям" другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рис. сверху). Тогда после каждого Петингого хода ситуация на "сдвинутой" картинке будет оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сходить согласно описанной стратегии. Так как игра закончится (не более чем за 10^4 ходов), в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выиграет.

5.1.5. Задача 5.

Условие: (Всеросс., 2017, финал, 11.8) Изначально в левом нижнем и правом нижнем углах доски 2018×2018 стоят два скакуна – красный и синий, соответственно. Коля и Саша ходят по очереди; начинает Коля. За ход игрок перемещает своего скакуна (Коля – красного, а Саша – синего), сдвигая его одновременно на 20 клеток по одной из координат и на 17 по другой; при этом скакун не может вставать на клетку, занятую другим скакуном. Запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них красный скакун стоит на одном и том же поле, и синий – тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Саша.

Решение: Приведем стратегию, позволяющую Саше выиграть. Раскрасим всю доску шахматным образом. Обозначим через К и S поля, на которых исходно стоят красный (k) и синий (s) скакуны соответственно; эти поля разного цвета. Нетрудно понять, что от S до К можно дойти ходами скакуна; поскольку скакун каждый раз прыгает на клетку другого цвета, количество ходов в таком пути нечетно. Выберем один такой путь

$S = S_1, K_1, S_2, K_2, \dots, S_n, K_n = K$, в котором поля не повторяются. Позицию в игре будем обозначать парой (A, B), где A и B – поля, на которых стоят k и s соответственно.

Саша будет действовать следующим образом. Если s стоит на S_i , Саша всегда перемещает его на K_i . Если s стоит на K_i , то Сашин ход зависит от

положения k : если тот стоит на K , то Саша ходит на S_{i+1} , иначе – на S_i .

Заметим сразу, что количество позиций в игре конечно, так что игра рано или поздно закончится. Значит, если Саша всегда может сходить согласно стратегии, то рано или поздно не сможет сделать ход Коля. Осталось показать, что Саша всегда сможет так сходить. После хода Коли скакуны находятся на полях одного цвета, так что стратегия не может предписывать идти на поле, занятое k .

Пусть до некоторого момента Саша ходил согласно стратегии, и перед очередным его ходом s стоит на одном из полей S_i или K_i (а k – на некотором поле U). Опишем множество уже встречавшихся позиций, в которых s стоял на S_i или K_i . Впервые s появился на S_i в позиции (K, S_i) перед Колиным ходом (возможно, это было начало игры). Затем после каждой пары ходов Коли и Саши были использованы (в некотором порядке) позиции (K, S_i) и (K, K_i) при некотором поле $K \neq K$.

Итак, если перед ходом Саши s стоит на S_i , а k – на поле U , то позиция (U, K_i) не встречалась раньше. Если s стоит на K_i , а k – на поле $U \neq K$, то позиция (U, S_i) также не встречалась раньше. Значит, в обоих случаях Саша может сделать ход согласно стратегии.

Наконец, если s стоит на K_i , а k – на поле $U = K$, то $i < n$ (иначе скакуны бы стояли на одном поле), так что поле S_{i+1} существует, и s на нем еще не был. Поэтому Саша может сходить туда. Доказательство окончено.

5.2. Задачи для самостоятельного решения

5.2.1. Задача 1

(Всеросс., 2013, регион, 9.6) Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

5.2.2. Задача 2

(Всеросс., 2013, регион, 10.5) На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася – любую из двух оставшихся, а затем Петя – оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

5.2.3. Задача 3

(Всеросс., 2017, финал, 9.5) На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может

окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдется равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причем в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать?

5.2.4. Задача 4

(Всеросс., 2019, регион, 10.3) Коля и Дима играют в игру на доске 8×8 , делая ходы по очереди, начинает Коля. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (доминушками) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминушкой). Дима за свой ход должен накрыть доминушкой две клетки (ещё не накрытые другими доминушками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

6. ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

6.1. Игры, использующие симметрию

6.1.1. Задача 1

Ответ: Выигрывает первый игрок.

Решение: Первый берет из второй кучки 100 конфет, а затем повторяет ходы второго, беря столько же конфет, сколько и второй, но из другой кучки.

6.1.2. Задача 2

Подсказка: Первый может свести игру к повторению ходов второго.

Решение: Первым ходом первый идет по диагонали "вправо-вверх" а затем повторяет ходы второго. Если второй идет по диагонали, то и первый то же; если второй вверх, то и первый вверх, аналогично, если второй делает ход вправо, то и первый делает ход вправо. При этом первый будет попадать на четвертую или шестую, или сразу на восьмую клетку по диагонали, если считать, что он стоял на первой. В обозначениях, принятых в шахматах, можно сказать, что первый стоял на поле a1, затем перешел на поле b2, а затем, повторяя ходы второго, он может оказаться на поле d4 или f6, или сразу на выигрышную позицию h8.

6.1.3. Задача 3

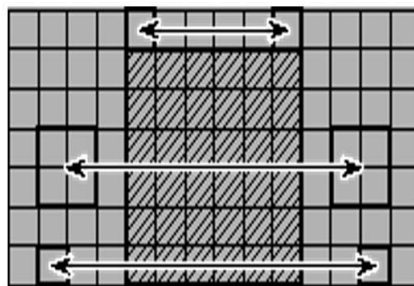
Ответ: Первый.

Решение: Ясно, что на результат влияют только последние цифры написанных на карточках чисел. Поэтому можно считать, что имеется по 200 карточек с цифрами 3, ..., 9, 0 и по 201 карточке с цифрами 1 и 2. Первый может сначала взять карточку с цифрой 2, а затем повторять ходы второго, пока это возможно. В момент, когда он не сможет повторить ход второго (после того, как второй возьмёт последнюю карточку с цифрой 1), первый берёт любую из оставшихся карточек, а далее снова повторяет ходы второго и т. д. В результате в конце у обоих карточек каждого типа будет поровну, кроме карточек с цифрами 1 и 2: у первого будет на одну карточку с двойкой больше и на одну карточку с единицей меньше.

Поскольку сумма $100 * (0 + 1 + \dots + 9)$ оканчивается нулём, то сумма первого оканчивается двойкой, а второго – единицей.

6.1.4. Задача 4

Решение: Первый закрашивает квадрат 18×18 , примыкающий к большей стороне прямоугольника, так, чтобы ось симметрии квадрата и ось симметрии прямоугольника совпадали (см. рис. для доски размером 7×14). Тогда относительно этой общей оси остаток прямоугольника распадется на две одинаковые части. Теперь на каждый ход второго игрока первый отвечает симметричным ходом, причем у первого ход всегда найдется, поскольку второй не может закрасить квадрат, пересекающий ось симметрии.



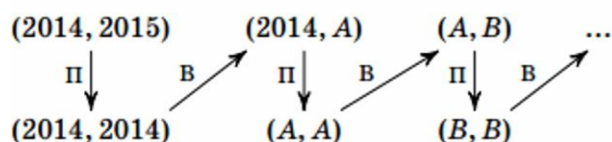
6.1.5. Задача 5

Решение: Выигрывает первый. Первым ходом он снимает центральную шашку, а потом играет центрально-симметрично.

6.1.6. Задача 6

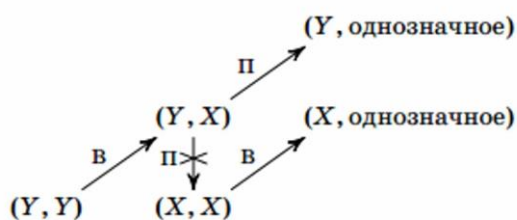
Ответ: Петя.

Решение: Пусть Петя первым ходом заменит 2015 на 2014, а каждым следующим ходом будет уравнивать числа (он всегда может это сделать, повторив ход Васи с тем числом, которое Вася не менял):



Если Петя будет действовать так всю игру, то, конечно, в некоторый момент Вася сделает из одного из двух одинаковых чисел однозначное и выиграет.

Но посмотрим на этот момент внимательнее. Если Вася выиграл, заменив в паре (X, X) одно из двух чисел X на однозначное, то перед этим, на ходу Пети, число X на доске уже было. В этот момент Петя может заменить X на однозначное число и выиграть:



Петя может так пойти, потому что у него есть все возможности, которые были у Васи на последнем, выигрышном ходе: делить число X пополам, если оно чётное, и вычитать из него его же цифру.) Итак, сформулируем стратегию Пети полностью: "если одно из чисел можно заменить на однозначное – сделать это; в противном случае уравнивать два числа".

6.1.7. Задача 7

Решение: Назовём кратностью буквы то количество раз, в котором эта буква встречается в надписи. После хода Коли, буквы "А" и "О" имеют кратность 3, буквы "Д" "И" "С" и "Я" – кратность 2, а буквы "Г" "К" "Л" "М" "Н" "П" "Р" "Т" и "У" – кратность 1. Для того, чтобы выиграть, Алисе надо сначала стереть любую букву

кратности 1, чтобы количество букв каждой кратности стало чётным. Далее Алисе надо играть так, чтобы после каждого её хода количество букв каждой кратности было чётным. Для этого ей следует в ответ на каждый Колин ход стирать такое же количество букв той же кратности. Например, если Коля сотрёт три буквы "А" то Алиса должна стереть три буквы "О" а если Коля сотрёт одну букву "Д" то Алиса может стереть также одну букву "И". Тогда на каждый ход Коли у Алисы будет ответный ход, поэтому именно она сделает последний ход и выиграет.

*** Наглядно эту стратегию можно представить, например, так. Пусть Алиса мысленно упорядочит буквы по-другому: "АААДДИИКЛМНГПРТУСССЯЯООО". Тогда первым своим ходом она стирает букву "Г" а далее делает ходы, симметричные ходам Коли относительно середины этого "слова".

6.1.8. Задача 8

Решение: Назовем самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в конфигурации, симметричной изначальной. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

6.1.9. Задача 9

Ответ: Второй.

Решение: Пусть первый поставил на доску первую шашку. Заметим, что от перестановки горизонталей доски ничего не изменяется. То же относится и к перестановке вертикалей. Поэтому будем считать, что второму игроку дополнительно разрешается менять местами любые горизонталы и вертикали. После первого хода первого игрока второй игрок переставит горизонталы и вертикали так, чтобы первая шашка оказалась в средней вертикали, но не в центре доски.

Далее он делает ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. В частности, вторая шашка тоже окажется в средней вертикали, и первый не сможет занять центральную клетку. Легко проверить, что второй всегда сможет сделать симметричный ход (отдельно следует рассмотреть случай хода в среднюю горизонталь).

6.1.10. Задача 10

Ответ: Если количество монет в мешках различается не более, чем на 1, то алмаз достанется второму пирату, в противном случае – первому.

Решение: Рассмотрим случай, когда количество монет в мешках различается не более, чем на 1.

Пусть второй пират на каждом шагу берет столько же монет, что и первый, но из другого мешка. Нетрудно убедиться, что в этом случае второй всегда может сделать ответный ход.

Каждый раз после хода второго пирата разность числа монет в мешках будет

той же, что в начале, значит, после некоторого его хода в одном мешке монет вообще не будет, а в другом будет не более одного, значит, первый пират не сможет сделать ход и проигрывает.

В другом случае – если разность больше 1 – первый пират своим ходом забирает из большего мешка m монет, если разность имеет вид $3m$ или $3m \pm 1$, чем приводит количество монет в мешках к первому случаю и дальше использует описанную выше стратегию.

6.1.11. Задача 11

Ответ: первый.

Решение: Первым ходом закрашивает центральную клетку, далее ходит симметрично ходам второго игрока относительно центра доски.

6.1.11. Задача 12

Ответ: первый.

Решение: Первым ходом провести хорду таким образом, чтобы на двух образовавшихся дугах окружности находилось равное количество точек, далее делать ходы симметрично ходам второго игрока относительно первой проведенной хорды (соединять соответственные точки).

6.1.13. Задача 13

Ответ: первый.

Решение: Первым ходом забрать одну кучку камней целиком, далее брать столько же камней, сколько и второй, но из другой кучки.

Примечание: первым ходом забрав одну кучку камней, первый игрок сводит игру к игре в задаче 5.1.3, причем становится в ней вторым игроком.

6.1.14. Задача 14

Ответ: первый.

Решение: Первым ходом закрасить квадрат 2×2 (см. рис.), а дальше делать ходы, симметричные ходам второго игрока относительно вертикальной оси симметрии прямоугольника.



6.1.15. Задача 15

Ответ: первый.

Решение: Первым ходом нужно создать симметричную картину. Для этого в случае нечетного количества минусов нужно переправить центральный минус на плюс, а в случае четного количества минусов – два центральных минуса. Далее ходы делать симметрично ходам второго игрока.

6.1.16. Задача 16

а) Ответ: второй.

Решение: Сначала второй игрок разламывает соты симметрично предыдущему ходу первого игрока: если первый разломил по вертикальной линии, то симметрично относительно вертикальной оси симметрии, если первый разломил вдоль горизонтальной линии, то второму нужно разломить симметрично относительно горизонтальной оси симметрии.

б) Ответ: первый.

Решение: Первым ходом нужно разломить вдоль горизонтальной линии, отделяющей верхние три рядка от шести нижних. Таким образом, получатся симметричные соты, далее воспользоваться стратегией второго игрока из игры а).

в) Ответ: второй.

Решение: Ходы нужно делать симметрично относительно диагонали, на которой находится клеточка с дегтем. Например, если первый разломил вдоль горизонтальной линии, отделяющей верхние четыре рядка от пяти нижних, то второй должен разломить вдоль вертикальной линии, отделяющей правые четыре рядка от пяти левых. В результате все время будет получаться симметричная ситуация, в которой второй всегда будет иметь ответный ход.

6.1.17. Задача 17

Ответ: второй.

Решение: Первым ходом второму игроку нужно сделать так, чтобы оставшиеся лепестки ромашки образовали две равные группы подряд растущих лепестков. Если у ромашки первоначально четное число лепестков, то после первого хода первого игрока второй игрок делает симметричный относительно центра ромашки ход. Если у ромашки нечетное количество лепестков, то если первый оторвал один лепесток, второй должен оторвать два, расположенные напротив только что оторванного лепестка, а если первый оторвал два лепестка – аналогично нужно оторвать один лепесток. Далее ходы нужно делать симметрично ходам первого игрока.

6.1.18. Задача 18

Ответ: первый.

Решение: Так как каждое из чисел, стоящих на угловых клетках, войдет в обе суммы, то заполнение этих клеток не влияет на результат игры (как и число, записанное в центральной клетке). Оставшиеся четыре клетки (назовем их результативными) выгодно заполнять так, чтобы оказаться последним. Этого может добиться первый игрок, начав, например, с заполнения центральной клетки, а затем отвечая на любой ход второго игрока ходом, симметричным относительно центральной клетки. Как только на результативных клетках будут записаны три числа (третье запишет второй игрок), первый игрок сможет записать подходящее четвертое число.

6.1.19. Задача 19

Ответ: у второго.

Указание: использовать центральную симметрию.

6.1.20 Задача 20

Ответ: первый.

Решение: Первым ходом нужно снять центральную шашку, затем делать ходы центрально- симметрично ходам второго игрока.

6.1.21. Задача 21

Ответ: первый.

Решение: В этой игре проигрывает тот, кто отломит полоску ширины 1. Первый сначала должен разделить шоколадку на две части размером 5×5 , а затем действовать симметрично ходам второго игрока.

6.1.22. Задача 22

Ответ: у первого.

Решение: Первым ходом он ставит крестик в центральную клетку. Затем после каждого хода второго игрока ставит крестик в центрально-симметричную клетку.

6.2. Игры, в которых стратегия – дополнение

6.2.1. Задача 1

Решение: а) Пусть n четно. Тогда первый игрок мысленно разбивает доску на «доминушки», далее пользуется стратегией «закрыть доминушку». Перед ходом первого игрока фишка стоит на одной клетке «доминушки». Ход нужно сделать на вторую клетку. Второй игрок делает ход на незакрытую «доминушку», первый игрок «закрывает» ее, и т. д. Таким образом, первый игрок может гарантировать себе ответный ход и выигрыш.

Пусть n нечетно. Тогда вся доска за исключением клетки, на которой стоит фишка, разбивается на «доминушки», и второй игрок может воспользоваться стратегией «закрыть доминушку» и выиграть.

Б) Ответ: первый.

Решение: Пользуется той же стратегией. Для четного n обоснование очевидно. Пусть n нечетно. Докажем, что второй игрок не сможет сделать ход на свободную угловую клетку. Раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. Первоначально фишка стоит на белой клетке, первый игрок будет ходить на черные клетки, второй – на белые, следовательно, он не сможет сделать ход на угловую (черную) клетку. Поэтому первый игрок сможет воспользоваться стратегией «закрыть доминушку».

6.2.2. Задача 2

Ответ: первый.

Решение: Сначала поставить любое число во втором равенстве, затем –

каждый раз в том же равенстве, что и второй.

6.2.3. Задача 3

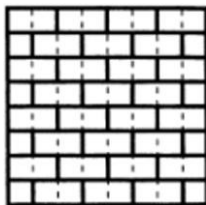
Ответ: выигрывает второй игрок.

Решение: Опишем стратегию второго игрока. Пусть второй игрок переворачивает обратно те стаканы, которые перевернул первый, до тех пор, пока первый не сделает свой 500-й ход. Тогда перед ходом первого игрока каждый раз все 1001 стакан стоят доньшками вниз. И первый игрок имеет право перевернуть каждым своим ходом не более 999 стаканов (ровно 999 ему можно будет перевернуть только при своем 500-м ходе). Тогда пусть первый игрок при своем 500-м ходе перевернул несколько (не более 999) стаканов. Остались неперевернутыми не более 1000 стаканов. А так как второму игроку своим ходом можно перевернуть 1000 стаканов или меньше, то он просто переворачивает оставшиеся стаканы и выигрывает.

6.2.4. Задача 4

Ответ: может.

Решение: Разобьем доску так, как показано на рисунке. Опишем стратегию второго игрока. Если первый покрасил клетку какого-либо прямоугольника 2×1 , то второму следует покрасить оставшуюся клетку этого прямоугольника. Если первый покрасил клетку, не входящую в какой-нибудь прямоугольник, то второму следует покрасить клетку, которая также не входит ни в какой прямоугольник (это всегда можно сделать, так как таких клеток четное количество). Так как в любой квадрат 2×2 входит ровно один прямоугольник разбиения, то первый никогда не сможет закрасить квадрат 2×2 .



6.2.5. Задача 5

Ответ: При $n = 3k$ или $n = 3k + 1$ выигрывает второй игрок, а при $n = 3k + 2$ – первый.

Решение: В каждом случае мы приведем одну из возможных выигрышных стратегий для игрока. Назовем обведенную точку непарной, если противоположная ей не обведена. Ясно, что после каждого хода количество непарных точек либо уменьшается на 1 (если игрок обвел точку, противоположную непарной), либо увеличивается на 1 (в противном случае). В каждом случае выигрышная стратегия будет заключаться в уменьшении числа непарных точек.

1. Приведем стратегию второго игрока, позволяющую ему выиграть при $n = 3k$ или $n = 3k + 1$. После хода первого число непарных точек нечетно, поэтому каждым своим ходом второй может уменьшить это число на 1. Тогда после

каждого хода первого это число будет равно 1, а после хода второго – 0. Покажем, что тогда второй всегда сможет сделать такой ход. Если первый уже сделал d ходов, то обведено $6d - 3$ точек; но так как $2n = 6k$ или $2n = 6k + 2$, то осталось хотя бы три необведенных точки, из которых одна непарная. Значит, еще осталась пара необведенных противоположных точек, и второй всегда сможет сделать требуемый ход, а значит, выиграет.

2. Теперь приведем стратегию первого игрока, позволяющую ему выиграть, если $n = 3k + 2$. Если после хода второго остались непарные точки, то он уменьшает их число на 1, в противном случае он создает единственную непарную точку. Тогда нетрудно видеть, что после каждого хода второго остается 0 или 2 непарные точки, а после каждого хода первого – ровно одна. Покажем, что первый всегда сможет сделать такой ход. Если второй сделал d ходов, то обведено $6d$ точек, а значит, осталось хотя бы 4 необведенные точки. При этом максимум две из них непарные; поэтому осталась пара необведенных противоположных точек и еще хотя бы одна необведенная, кроме них. Это и значит, что первый всегда сможет сделать ход и выиграет.

6.2.6. Задача 6

Ответ

Все значения n , при которых первый игрок может всегда выиграть, равны 2^m ($1, 2, \dots, 32, \dots$).

Решение:

Пусть первый игрок берет k спичек в первый ход.

- Если первый игрок может сделать так, чтобы на столе осталось ровно вдвое меньше спичек после его хода, он сможет всегда выиграть.
- Это связано с тем, что первый игрок может затем зеркально копировать ходы второго игрока, сохраняя контроль над игрой.

Условие выигрыша

Первый игрок выигрывает, если он может оставить на столе число спичек, равное числу вида $2^m - 1$, где m – целое число.

Таким образом, все выигрышные значения n можно выразить в виде: $n = 2^m$, где $m \geq 1$.

Пример

- Для $n=2$ первый игрок берет 1 спичку, оставляя 1 спичку для второго игрока, и выигрывает.
- Для $n=4$ первый игрок берет 3 спички, оставляя 1 спичку для второго игрока.
- Для $n=8$ первый игрок берет 7 спичек, оставляя 1 спичку для второго игрока.

6.2.7. Задача 7

Ответ: Выигрывает первый

Решение: Сначала ему надо делать ходы длиной в 4 клетки, пока он не встанет на 45-ю клетку. Теперь очередь хода за вторым. Если он тоже все время делает ходы длины 4, очередной ход приведет его на клетку 57. Тогда первый

следующим ходом должен пойти на клетку 48 и после ответа второго сходить так, чтобы между ним и вторым оказалось 3 клетки (легко видеть, что это всегда возможно). После этого второй будет вынужден пойти на 1, 2 или 3 клетки и окажется в итоге правее 49-й клетки. Значит, до финиша ему останется больше 48 клеток, и, чтобы добраться туда, он должен будет сделать не меньше 13 ходов. Первый же находится не левее 49-й клетки, и ему до финиша остается не более 52 клеток, которые он сумеет преодолеть за 13 ходов.

Рассмотрим теперь случай, когда среди 11 первых ходов второго был ход менее, чем на 4 клетки. Тогда он после 11-го хода окажется более, чем в 56 клетках от цели, и для ее достижения ему понадобится минимум 15 ходов, а первому до цели остается 56 клеток, и он сможет добраться до нее за 15 ходов, даже если второй при встрече вынудит его сделать ход длины 3 вместо хода длины 4.

6.2.8. Задача 8

Ответ: Выигрывает первый игрок.

Решение: Опишем выигрышную стратегию I игрока. Вначале он выкладывает на стол 0:0, II отвечает 0:a, тогда I выкладывает кость a:a. Теперь II делает ход либо 0:n, либо a:n. В первом случае I выкладывает кость n:a к концу, содержащему n, во втором – n:0 к тому же концу. Тогда после хода I игрока на концах цепочки будут 0 или a. Это же произойдет после того, как на ход II игрока 0:m (a:m) I ответит m:a (m:0). Кости вида 0:n и a:n ($n = 0, a$) разбиваются на пары, поэтому последний ход останется за первым игроком.

6.2.9. Задача 9

Ответ: Выигрывает Петя.

Решение: Мысленно разобьем контакты на четыре одинаковых группы: A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну проводов. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию проигрышная ситуация впервые случится после Васиного хода.

Опишем подробно Петину стратегию. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например, провод $A_i A_j$, то Петя перережет провода $B_j B_i, C_i C_j$ и $D_j D_i$. Если Вася перерезает провод между проводами из разных групп и с разными номерами, например, провод $A_i B_j$, то Петя в ответ перережет провода $A_j B_i, C_i D_j$ и $C_j D_i$. Если же Вася перерезал провод между контактами из разных групп с одинаковыми номерами, например, провод $A_k B_k$, то Петя перережет провод $C_k D_k$. Заметим, что из описанной стратегии Пети следует, что провода, которые он собирается резать, не будут отрезаны до его хода. Поэтому Петя всегда сможет разрезать требуемые провода.

Отметим, что каждый раз после хода Пети от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходит поровну проводов; при этом от одного из них столько же проводов отходило уже после Васиного хода. Поэтому ситуация, когда от одного контакта отрезан последний провод, случится впервые после Васиного хода. Так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

6.3. Поиск стратегии с конца

6.3.1. Задача 1

Ответ: второй.

Указание: В этой игре выигрышными являются соответственно ходы 99, 88, . . . , 11. Первый выигрышный ход не может сделать первый игрок. Следовательно, выигрывает второй игрок, называя каждый раз число, кратное 11.

6.3.2. Задача 2

Ответы: а) первый, б) первый, в) первый, г) второй, д) первый (в этом варианте игры повторяющаяся серия начинается только с клетки с номером 6).

Решение: В таблице представлены выигрышные и проигрышные позиции для каждой задачи (в скобки заключена повторяющаяся серия позиций):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	23	24
а	(в	п	п)	в	п	п	в	п	п	в	п	...	п	в
б	(в	п	в	п	п	п	п)	в	п	в	п	...	в	п
в	(в	п	п	в	п	п	п)	в	п	п	в	...	п	в
г	(в	в	п	п	в	п	п)	в	в	п	п	...	п	п
д	в	в	п	п	п	п	(в	п	п)	в	п	...	п	в

6.3.3. Задача 3

Ответ: первый.

Решение: Нужно оставлять сначала 24 камня, затем 20 и т.д. (число, кратное 4).

6.3.4. Задача 4

Указание: игра, изоморфная игре 2 (д) из самостоятельного решения.

6.3.5. Задача 5

Ответ: первый.

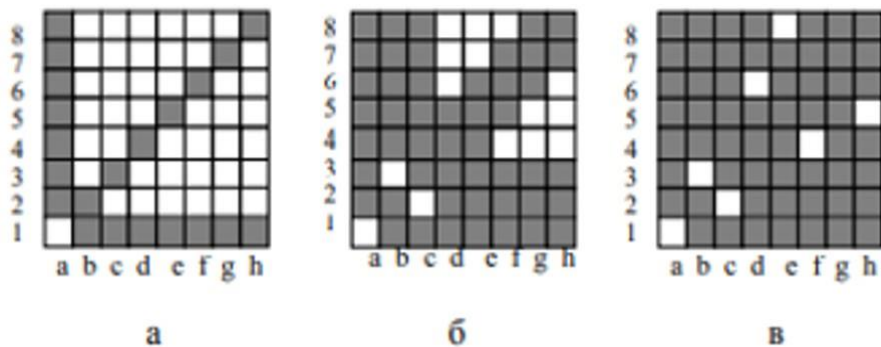
Решение: Для того чтобы своим ходом получить ровно 200 камней, надо предыдущим своим ходом получить 189 камней, перед этим – 178 камней и т.д. Эти числа можно записать в виде $11k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \leq 18$). Наименьшее из таких чисел, превышающих 50, является число 57. Следовательно n камней).

6.3.6. Задача 6

Ответ: первый.

Решение: Решать задачу будем с конца, т.е. с поля $a1$. Это поле является выигрышным. Отметим как проигрышные все поля, с которых за один ход можно попасть на поле $a1$: это все поля в соответствующих горизонтальной, вертикальной и диагональной линиях (см. рис. А). Рассмотрим поля $c2$ и $b3$. С каждого из этих полей за один ход можно попасть только на проигрышные поля, поэтому они являются выигрышными. Отметим все поля, с которых можно попасть на эти поля за один ход как проигрышные (см. рис. Б). Рассуждая так дальше, мы для всей шахматной доски определим проигрышные и выигрышные

поля (см. рис. В). С поля f8, на котором стоит ферзь, первым ходом можно попасть на выигрышное поле, значит, выигрывает первый игрок.



6.3.7. Задача 7

Ответ: число должно оканчиваться на ноль.

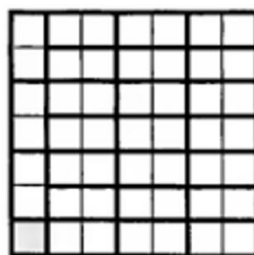
Решение: Чтобы последним ходом получить ноль, нужно, чтобы было записано однозначное число. Чтобы «заставить» соперника записать однозначное число, нужно перед его ходом записать 10. Опишем выигрышную стратегию для Зайца. После хода Волка получится число с ненулевой последней цифрой. Своим ходом Заяц должен вычесть последнюю цифру, в результате получится число, оканчивающееся на 0. Продолжая так же далее, после некоторого количества ходов Заяц запишет 10. Какое бы число Волк не вычел, следующим ходом Заяц получит ноль. Если же первоначальное число не будет оканчиваться на 0, то Волк вычтет последнюю цифру и дальше воспользуется описанной выигрышной стратегией.

6.4. Разбиение на пары

6.4.1. Задача 1

Ответ: выигрывает второй игрок.

Указание: Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Разобьем все клетки доски (кроме начальной) на пары, как показано на рисунке. На каждый ход первого в одну из клеток некоторой пары второй ходит в другую клетку той же пары. Таким образом, у второго игрока всегда есть ответный ход. Значит, второй игрок выигрывает (см. рисунок).



6.5. Передача хода

6.5.1. Задача 1

Указание: используется прием «передачи хода» (первым ходом можно вычеркнуть либо только число 1, либо другое число вместе с его делителями, в том числе и 1).

6.5.2. Задача 2

Ответ: при правильной игре получается ничья.

Решение: Каждый может покрасить три взаимно скрещивающихся ребра (сразу «пометить» все грани).

6.5.3. Задача 3

Ответ: второй.

Решение: В начале партии второй игрок должен стирать числа, кратные трем, до тех пор, пока таких не останется. Так как количество чисел, кратных трем и не превосходящих 1000, равно 333, то второму понадобится не более 333 ходов (некоторые числа, кратные трем, могут быть стерты и первым игроком). После этого второй игрок делает свои ходы произвольно до того момента, пока останется три числа (после каждого хода первого игрока остается нечетное количество чисел). Каждое из трех оставшихся чисел будет давать остаток 1 или 2 при делении на 3, поэтому среди них обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки, именно их второй игрок и должен оставить.

6.5.4. Задача 4

Ответ: не может.

Решение: Проведём (за Ваню) сначала среднюю фишку (крайняя и так пройдёт). Будем двигать её вперёд, не обращая внимания на ходы Серёжи. Докажем, что она пройдёт. Назовём номер горизонтали, на которой фишка стоит (считая снизу), её высотой. Если Ванина фишка окажется между Серезиными, то её удвоенная высота $2h$ будет равна сумме высот Серезиных фишек (если они на одной горизонтали, то это очевидно; если же Ванину фишку «зажали» по диагонали, то сумма высот Серезиных фишек будет равна $h - 1 + h + 1 = 2h$). Это может произойти либо после Серезино хода, либо после Ваниного. Пусть это произошло после хода Серёжи. Значит, ребята сделали равное число ходов – по n , и сумма высот Серезиных фишек равна $n + 2$ (перед началом игры она равна 2), а высота Ваниной равна $6 - n$ (перед началом игры она равна 6). Получаем $n + 2 = 12 - 2n$, то есть $12 = 3n + 2$, что, очевидно, неверно, так как 12 делится на 3. Теперь рассмотрим другой случай: Ванину фишку «зажали» после его хода. Значит, Ваня сделал на один ход больше: Серёжа сделал n ходов, а Ваня $n + 1$. Тогда сумма высот Серезиных фишек равна $n + 2$, а высота Ваниной равна $6 - n - 1$. Получаем $n + 2 = 10 - 2n$, т.е. $12 = 3n + 4$, что, очевидно, неверно.

6.6. Задачи с ВсОШ

6.6.1. Задача 1

Ответ: 5 рублей.

Решение: Рассмотрим 4026-значное число A , состоящее из 2013 единиц и 2013 двоек. Пусть в этом числе в нечётных разрядах стоит k единиц и $l = 2013 - k$ двоек, тогда в чётных разрядах будет k двоек и l единиц (здесь k может принимать любое целое значение от 0 до 2013). Разность сумм цифр в нечётных разрядах и чётных разрядах равна $(k + 2l)(2k + l) = lk = 2013k$. Поскольку 2013 делится на 11, число A делится на 11 тогда и только тогда, когда k делится на 11.

За один ход k изменяется не более чем на 1. Поэтому, если Вася изначально сложит число A , для которого, скажем $k = 5$ (очевидно, это возможно), то, очевидно, Пете потребуется не менее 5 раз изменить k на 1, чтобы впервые получить число, для которого k кратно 11 (т. е. $k = 0$ или $k = 11$).

Покажем, что наоборот, пяти ходов Пете всегда хватит. Меняя некоторую единицу, стоящую в нечётном разряде, с двойкой, стоящей в чётном разряде, он может уменьшить k на 1 за один ход, если только $k \neq 0$. Аналогично, меняя некоторую двойку, стоящую в нечётном разряде, с единицей, стоящей в чётном разряде, он может увеличить k на 1 за один ход, если только $k \neq 2013$. Пусть начальное Васиное число давало остаток r при делении на 11. Если $r = 0$, то исходное число уже делится на 11, и ничего делать не нужно. Если $1 \leq r \leq 5$, то за r операций Петя может уменьшить k на r до ближайшего числа, кратного 11. Если же $6 \leq r \leq 10$, то за $11 - r$ операций Петя может увеличить k на $11 - r$ до ближайшего числа кратного 11 (это возможно, так как наибольшее возможное значение $k = 2013$ кратно 11).

Замечание: Если бы у мальчиков было по n карточек с цифрами 1 и 2, ответ в аналогичной задаче зависел бы от остатка от деления n на 11 – даже при больших n . Так, если $n = 2000$, то Пете нужно добиться того, чтобы k имело остаток 10 при делении на 11; значит, если $k = 2000$ или $k = 0$, то Пете может понадобиться 10 ходов.

Поэтому полное решение задачи должно существенно использовать тот факт, что $n = 2013$.

6.6.2. Задача 2

Ответ: Да.

Решение: Пусть Петя первым ходом сделает свободный член уравнения нулём. Тогда полученное уравнение точно будет иметь корень 0; значит, Пете достаточно добиться того, чтобы другим корнем было число $t = 2014$. Это всегда можно сделать: если после хода Васи получится уравнение $x^3 + ax^2 + bx = 0$, то Петя может заменить оставшуюся звёздочку на $a(t + a)$, а если после хода Васи получится $x^3 + ax^2 + bx = 0$, то Петя может заменить звёздочку числом $(t^2 + b)/t$. Очевидно, все числа, которые ставит Петя, рациональны.

6.6.3. Задача 3

Ответ: Нет.

Решение: Приведем стратегию, позволяющую Васе гарантированно выиграть. Первые ходы он делает произвольно, пока перед его очередным ходом не будут окрашены 33 точки. Пусть A – одна из крайних окрашенных точек, а B – неокрашенная точка, соседняя с другой крайней. Тогда существует отмеченная точка C такая, что ABC – равносторонний треугольник. На этом ходе Вася красит точку B в тот же цвет, что и A (без ограничения общности, красный). Далее он действует так. Если Петя красит точку, соседнюю с C , то Вася красит C в красный цвет и выигрывает, получив одноцветный треугольник ABC . Если же Петя красит точку, несоседнюю с C , то и Вася тоже красит несоседнюю с C .

Если Вася сможет так действовать, то в результате точку C окрасит именно он и выиграет. Предположим, что он не смог сходить согласно стратегии. Это значит, что Петя окрасил несоседнюю с C точку, а Вася не имеет такой возможности. Это значит, что остались неокрашенными ровно три точки: C и два ее соседа. Но тогда окрашено 96 точек, и ход должен делать Петя. Полученное противоречие завершает решение.

6.6.4. Задача 4

Ответ: Дима.

Первое решение: Приведем стратегию за Диму. Разобьем доску на 32 прямоугольника 1×2 до начала игры. За первые 16 ходов соперник может поставить свои крестики в не более чем 16 из них, значит, мы сможем покрыть 16 остальных прямоугольников своими доминошками, и все крестики соперника будут стоять в каких-то клетках 16 остальных прямоугольников (назовем эти прямоугольники новыми).

Теперь покажем, что далее Дима сможет ответить на сделанный Колей $(16 + k)$ -й ход ($1 \leq k \leq 16$), покрывая некоторый новый прямоугольник. Коля поставил к этому моменту $16 + k$ крестиков, и все эти крестики находятся в 16 новых прямоугольниках. Значит, Коля уже заполнил целиком крестиками хотя бы k новых прямоугольников, а Дима покрыл к этому моменту не более $k-1$ нового прямоугольника. Значит, перед $(16 + k)$ -м ходом Димы есть хотя бы один новый прямоугольник с двумя крестиками, еще не покрытый доминошкой, и его можно покрыть этим ходом, что и требовалось доказать.

После 32-го хода Димы вся доска будет покрыта доминошками, и Коля проиграет, ибо ходить ему некуда.

Второе решение: Приведем стратегию за Диму. Разобьем доску на квадраты 2×2 до начала игры. Пусть Дима будет отвечать на крестик, поставленный впервые в каком-то квадрате, доминошкой на две пустые клетки того же квадрата. Когда Коля будет ставить второй крестик в квадрате, Дима ответным ходом накроет этот крестик и первый поставленный в этом квадрате крестик доминошкой, в результате чего квадрат окажется покрытым двумя доминошками. Таким образом, на любой ход Коли у Димы есть ответный ход.

Литература

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. М.: Просвещение, 2011. – 207 с.
2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013. – 207 с.
3. Агаханов Н.Х., Сергеева Т.Ф., Подлипский О.К. Теория и практика работы с математически одарёнными детьми. – М.: Илекса, 2018. – 326 с.
4. Андреев А.А., Максимова Е.А., Скородумова Е.А. Олимпиада школьников: ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2022/2023 учебный год. 2023.
5. Андреев А.А., Максимова Е.А., Скородумова Е.А. Олимпиада школьников: ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2023/2024 учебный год. 2024.
6. Белов А.Я., Джамбетов Э.М., Тарамова Х.С. Решение олимпиадных задач по математике. Учебное пособие. Грозный-Махачкала: АЛЕФ, 2020. – 172 с.
7. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др. – Москва: МЦНМО, 2007. – 468 с.
8. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.
9. Каннель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О. Бугаенко. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.
10. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / Р.М. Федоров и др.; Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.
11. Составители: Бебчук Д.Е., Шилов Н.В., Бибииков П.В., и др. Сборник заданий международной олимпиады «Innopolis Open» по профилю «Математика» 2018-2023 учебные годы.
12. Шахматов В.М., Лисок А.Л., Тарбокова Т.В. Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 144 с.
13. Шень. А. Игры и стратегии с точки зрения математики / А. Шень. – Москва: МЦН-МО, 2008. – 40 с.

Для заметок

Учебное издание

Белов Никита Сергеевич

ТЕОРИЯ ИГР

Пособие для подготовки к олимпиадам по математике

Подписано в печать 23.01.2025. Гарнитура Times New Roman.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 3,02. Тираж 500 экз. Заказ № 33
Оригинал-макет подготовлен и тиражирован в ООО «ЭПИЦЕНТР»
308010, г. Белгород, пр-т Б. Хмельницкого, 135, офис 40
ООО «АПНИ», 308023, г. Белгород, пр-кт Богдана Хмельницкого, 135